учебной деятельности детей, сохранению и улучшению их здоровья; развитию музыкальных способностей, воображения и фантазии; усилению творческой активности; гармонизации эмоциональной сферы; урегулированию проблем межличностного общения.

***Ключевые слова:** музыкотерапия; направления музыкотерапии; дети с особыми образовательными потребностями; тревожность; самооценка.*

Sadova I. I., Kobenko S. M. The music therapy as a means of rehabilitation of children with special educational needs.

In the article it has been summary zed and try it out to conceptualize the modern practical experience of using of the music therapy for children with special educational needs, its main theoretical positions have been systematized. The artistic technologies of inclusive education and their therapeutic and pedagogical possibilities have been revealed; it has been characterized the music therapy as a means of psychosocial restoration of the personality; forms and varieties of music therapy have been described; the classification of musical and therapeutic in fluencies has been carried out.

It has been proved that the use of MT in the inclusive and pedagogical process contributes to increasing the effectiveness of educational activities of children with special educational needs, preservation and improvement of their health; the development of their musical abilities, fantasy and imagination; the strengthening of their creative activity; the harmonization of the emotional sphere; the settlement of the problems of inter personal communication.

***Key words:** the music therapy; directions of the music therapy; children with special educational needs; anxiety; self-esteem.*

УДК 378
DOI https://doi.org/10.31392/2311-5491/2019-68.39

Самойленко В. Г., Григор'єва В. Б.

ОСОБЛИВОСТІ ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ІНТЕГРАЛУ РІМАНА ПІД ЧАС ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ МАЙБУТНІМ УЧИТЕЛЯМ МАТЕМАТИКИ

Зміст математичної підготовки майбутніх вчителів у вищих педагогічних навчальних закладах суттєво відрізняється від змісту підготовки фахівців в класичних і технічних університетах. Це пов'язано з тим, що фундаментальна математична підготовка майбутнього вчителя математики повинна забезпечити дієві знання, а також професійні компетенції, які виходять за межі шкільного курсу математики. Серед дисциплін, які забезпечують фундаментальну математичну підготовку, провідне значення має математичний аналіз. У статті на прикладі розгляду конкретного питання даного курсу визначені математичні аспекти, які стосуються особливостей викладання матеріалу з урахуванням тих вимог, що висуваються нині до процесу підготовки фахівців в галузі освіти. Розглянуто введення поняття інтегралу Рімана для функцій, заданих на метричних просторах з мірою. Переваги такого підходу пояснюються тим, що кратні, поверхневі та криволінійні інтеграли вписуються в дану схему та одержуються, таким чином, в якості прикладів під час відповідного вибору простору та міри.

***Ключові слова:** математична підготовка майбутніх вчителів математики, функція, задана на метричному просторі з мірою, інтеграл Рімана.*

Основні пріоритети, що зумовлюються реформами в українській освіті, стосуються оновлення змісту, форм і методів професійної підготовки фахівців у вищій школі. У зв'язку з цим підготовка майбутніх вчителів математики, які володіють необхідними характеристиками конкурентоспроможного фахівця, стає нагальною потребою. Професійна підготовка майбутніх вчителів математики передбачає процеси викладання та навчання, формування та оволодіння системою відповідних знань, умінь та навичок, розвиток та саморозвиток особистості студента педагогічного закладу в процесі здобуття математичної освіти, результатом якого буде готовність до професійної діяльності. Важливе місце у професійній підготовці вчителів математики відводиться курсу математичного аналізу. Проблема підготовки майбутніх вчителів математики у процесі навчання математичного аналізу є досить багатоаспектною. Проте однією з проблем сьогодення є розкриття можливостей даної дисципліни в процесі здійснення професійно-педагогічної спрямованості навчання та вдосконалення професійної підготовки вчителів математики. Ми зупинимося на математичному аспекті введення поняття інтегралу Рімана для функцій, заданих на метричних просторах з мірою.

Усюди нижче (без додаткових застережень) будемо припускати, що (X,ρ) – обмежений метричний простір, $\mathfrak{R}$ – вихідна алгебра на *X*, на якій задана міра, $\tilde{\mathfrak{R}}$ – алгебра вимірних за Жорданом множин; $\hat{A}(X)$ – $L(X)$-алгебра вимірних множин за Борелем, а $L(X)$ $\left(L(X)\supset\tilde{\mathfrak{R}}\right)$– σ-алгебра вимірних множин за Лебегом; μ – міра Лебега на $L(X)$, побудована за вихідною мірою і є її продовженням [1, с. 214].

Розбиттям P множини *X* назвемо довільну систему $\{P_i\}_{i=1}^n$ підмножини *X*, що задовольняє наступним умовам: а) $P_i \in \widetilde{\Re}$, $i = 1,\ldots, n$; б) $\bigcup_{i=1}^n P_i = X$, $\mu(P_i \cap P_j) = 0$, $i \neq j$; в) $\mu(P_i) > 0$; $i = 1,2,\ldots, n$.

Число $\lambda(P) = \max_{i=1,\ldots,n} d(P_i)$ – параметр розбиття, де $d(P_i)$ діаметр множини P_i $\left(d(P_i) = \sup_{x,x'\in P_i} \rho(x,x')\right)$. При цьому будемо припускати, що вихідна алгебра $\Re$ і міра такі, що виконується умова: $\forall \delta > 0$ існує розбиття *P* таке, що $\lambda(P) < \delta$. Відмітимо, що ця умова виконується всюди нижче в усіх конкретних ситуаціях.

Нехай на *X* визначена функція $f : X \to R^1$. *Інтегральною сумою* $\sigma(f,(P,\xi))$, для функції *f* та розбиття з обраними точками (P,ξ) $\left(\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n, \xi_i \in P_i\right)$, будемо називати суму $\sigma(f,(P,\xi)) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\mu(P_i)$. Число *I* називається *інтегралом Рімана* від функції *f* на множині *X* з мірою μ, а сама функція інтегрованою за Ріманом на множині *X* з мірою μ, якщо: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)\ \ \forall (P,\xi)\ \ \lambda(P) < \delta\ \ \left|I - \sigma(f,(P,\xi)\right| < \varepsilon$, незалежно від обраних точок ξ.

Введемо позначення $I = (R)\int f(x)d\mu(\tilde{o}) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,(P,\xi)$

Зауваження 1. Із означення легко випливає наступне твердження. Якщо на (X,ρ) задані алгебри $\Re_1$ та $\Re_2$ такі, що $\Re_1 \subset \Re_2$ і міри μ_1, μ_2 визначені, відповідно, на алгебрах $\Re_1$, $\Re_2$ та $\mu_1(A) = \mu_2(A)$, $\forall A \in \Re_1 \subset \Re_2$ (тобто μ_2 – розширення μ_1), тоді з інтегрованості за Ріманом *f* відносно міри μ_2 випливає інтегрованість за мірою μ_1 і $(R)\int_X f(x)d\mu_1(\tilde{o}) = (R)\int_X f(x)d\mu_2(\tilde{o})$.

Теорема (*необхідна умова інтегрованості*). Нехай *f: X*$\to R^1$ інтегрована на *X* за мірою μ, тоді *f(x)* обмежена на множині *X*.

Доведення. Візьмемо довільне розбиття *P* множини *X*. Припустимо, що *f* необмежена на *X*, тоді існує i_0, для якого f буде необмежена на P_{i_0}. В цьому випадку за рахунок вибору ξ_{i_0} величину $|f(\xi_{i_0}) \cdot \mu(P_{i_0})|$ можна зробити скільки завгодно великою. Тоді для довільного *I* величина $|I-\sigma(f,(P,\xi))|$ може бути зроблена скільки завгодно великою за рахунок вибору ξ_{i_0}. Оскільки розбиття *P* довільне, це суперечить означенню інтегрованості. Таким чином, наше припущення невірне і функція *f* обмежена на *X*.

Властивості та необхідна і достатня умова існування інтегралу Рімана співпадають з класичними властивостями інтегралу Рімана [2, с. 115], доведення яких можна переговорити в даній ситуації.

Нехай (X,ρ) – компактний простір, алгебра $\Re$ і міри, задані на *X,* такі, що $B(X) \subset L(X)$. Крім того, будемо припускати, що міра Лебега μ, яка побудована на вихідній мірі, задовольняє умові:

1. $\forall x \in \mathrm{X},\quad \{x\} \in B(X) \subset L(X),\quad \mu(\{x\}) = 0;$
2. $\forall \grave{a} \in \mathrm{X},\quad \forall \alpha, R\quad \mu(S(a,\alpha R)) \le \mathrm{K}(\alpha)\mu(S(a,R))$, де $S(a,R) = \{x \mid x \in \mathrm{X}, \rho(a,x) < R\}$;
3. Якщо $A \in L(X)$ і $\mu(A) = 0$, то $\forall \varepsilon > 0$ існує не більш ніж зчисленна система відкритих куль, яка є покриттям *A*, сума мір яких менше ε.

Зазначимо, що дані умови виконуються для міри Лебега в R^n, (при цьому $k(\alpha)$ залежить тільки від розмірності *n* і коефіцієнту гомотетії α), а також і в інших ситуаціях, які будуть розглянуті нижче.

Теорема (*Лебега*). Нехай X – компактний простір; $f : \mathrm{X} \to R^1$ обмежена на X і μ задовольняє вказаним умовам. Для того, щоб $f(x)$ була інтегрована на X необхідно і достатньо, щоб вона була неперервна на X за винятком множини точок міри Лебега 0.

Доведення. Необхідність. Нехай E – множина точок розриву функції f Припустимо, що $\mu(E) \neq 0$. Якщо x – точка розриву $f(x)$, то $\omega(f,x) = \lim_{\delta\to 0} \omega(f, S(x,\delta)) \neq 0$ (тобто $\omega(f,x) = 0$ у випадку неперервності f в точці x). Тоді $\mathrm{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n$, де $\mathrm{E}_n = \left\{x \in \mathrm{X} / \omega(f,x) \ge \frac{1}{n}\right\}$ (E_n – замкнений, отже, $\mathrm{E}_n \in \mathrm{B}$ і $\mathrm{E} \in \mathrm{B}$), тоді за властивістю міри Лебега існує E_{n_0} таке, що $\mu(\mathrm{E}_{n_0}) \neq 0$. Нехай P – довільне розбиття X.

Розглянемо систему множин

$$\mathrm{A} = \left\{ \mathrm{P}_i \in \mathrm{P} / \mathrm{P}_i \cap \mathrm{E}_{n_0} \neq \varnothing, \omega_i = \omega(f, \mathrm{P}_i) \geq \frac{1}{2n_0} \right\}, \mathrm{B} = \mathrm{P} \setminus \mathrm{A}.$$

Система A утворюється наступним чином. Кожна точка $x \in \mathrm{E}_{n_0}$ або внутрішня для будь-якого P_i, і тоді $\mathrm{P}_i \in \mathrm{A}$, або гранична для будь-яких P_i $i = i_1, ..., i_m$. В останньому випадку хоча б на одній із множин $\mathrm{P}_i \cup \{x\}$ $(i = i_1, ..., i_m)$ коливання функції повинно бути не менше ніж $\frac{1}{2n_0}$ (у протилежному випадку в силу нерівності трикутника [3] коливання в точці x буде менше $\frac{1}{n_0}$).

Нехай $\mathrm{P}_{i_j} \cup \{x\}$ має таку властивість, тоді перепозначимо $\mathrm{P}_{i_j} = \mathrm{P}_{i_j} \cup \{x\}$ (якщо $x \notin \mathrm{P}_{i_j}$) і $\mathrm{P}_{i_j} \in \mathrm{A}$. Таким чином, $\bigcup\limits_{\mathrm{P}_i \in \mathrm{A}} \mathrm{P}_i \supset \mathrm{E}_{n_0}$ і $\omega(f, \mathrm{P}_i) \geq \frac{1}{2n_0}$ ($P_i \in A$). З точки зору розбиття нові множини відрізняються від початкових на одноточкову множину міри *0*; при цьому параметр розбиття не зміниться, оскільки точка, добавлена до P_{i_j}, гранична. Враховуючи раніше сказане, отримаємо, що який би не був параметр $\lambda(\mathrm{P})$ розбиття P $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f, \mathrm{P}_i)\mu(\mathrm{P}_i) \geq \sum\limits_{\mathrm{P}_i \in \mathrm{A}} \omega(f, \mathrm{P}_i)\mu(\mathrm{P}_i) \geq \frac{1}{2n_0} \sum\limits_{\mathrm{P}_i \in \mathrm{A}} \mu(\mathrm{P}_i) \geq \frac{1}{2n_0} \mu(\mathrm{E}_{n_0})$, тобто для $\forall \varepsilon < \frac{1}{2n_0} \mu(\mathrm{E}_{n_0})$ необхідна і достатня умова інтегрованості функції не виконується, що суперечить інтегрованості $f(x)$. Наше припущення невірне і $\mu(\mathrm{E}) = 0$.

Достатність. Нехай $\varepsilon < 0$ довільне; $\mathrm{E}_\varepsilon = \{x \in \mathrm{X} / \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$, тоді $\mu(\mathrm{E}_\varepsilon) = 0$ і E_ε – замкнена (що доводиться безпосередньо із означень E_ε, $\omega(f, x)$ і граничної точки). Оскільки X – компактний простір, то E_ε – компактна підмножина X.

Через компактність E_ε і властивості 3 міри існує скінченна система відкритих куль $S_i = S_i(a_i, r_i)$ $(i = 1, ..., k)$, таких, що $\mathrm{E}_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$ і $\sum\limits_{i=1}^{k} \mu(S_i) < \varepsilon$. Позначимо

$$C_1 = \bigcup_{i=1}^{k} S_i, \ C_2 = \bigcup_{i=1}^{k} S(a_i, 2r_i) \text{ і } C_3 = \bigcup_{i=1}^{k} S(a_i, 3r_i).$$

Зрозуміло, що $\mathrm{E}_\varepsilon \subset C_2$. Крім того, відстань *d* між границями C_2 і C_3 строго додатна. Дійсно, границя C_2 складається із поверхонь куль $\mathrm{B}_i(a_i, 2r_i) = \{x \in \mathrm{X} / \rho(x, a_i) = 2r_i\}$, а границя C_3 – із поверхонь куль $\mathrm{B}'_i(a_i, 3r_i) = \{x \in \mathrm{X} / \rho(x, a_i) = 3r_i\}$, $i = 1, \ldots, k$.

Якщо *x* належить границі C_2, а *y* – границі C_3, то можливі два варіанти:

1. $x \in \mathrm{B}_i$, а $y \in \mathrm{B}'_i$, тоді $3r_i = \rho(y, a_i) \leq \rho(x, y) + \rho(x, a_i) = \rho(x, y) + 2r_i$, тобто $\rho(x, y) \geq r_i$, $i = 1, \ldots, k$;

2. $x \in \mathrm{B}_i$, а $y \overline{\in} \mathrm{B}'_i$, або $ó \notin S(a_i, 3r_i) = \{y / \rho(a_i, y) < 3r_i\}$, оскільки y – точка з границі C_3 (C_3 – відкрита множина).

Отже, $3r_i < \rho(a_i, y) \leq \rho(a_i, x) + \rho(x, y) = \rho(x, y) + 2r_i$, тобто знову $\rho(x, y) \geq r_i$, i = 1,…, *k*. Таким чином, $\forall x, y$, що знаходяться на границях C_2 і C_3 відповідно, $\rho(x, y) \geq d = \min\limits_{i=1,...,k} r_i > 0$.

Враховуючи властивість 2 міри, ми отримаємо:

$$\mu(C_3) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(S(a_i, 3r_i)) \leq k(3) \sum_{i=1}^{k} \mu(S_i) < k(3)\varepsilon.$$

Довільна підмножина C_3, діаметр якої менше *d*, або міститься в C_3, або знаходиться в компактній множині $\mathrm{X} \setminus C_2 = \mathrm{K}$ (*K* – компактна, оскільки є замкненою підмножиною компактного простору X).

Нехай P – довільне розбиття X з параметром $\lambda(\mathrm{P}) < d$, тоді

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\mu(\mathrm{P}_i)\le\sum\nolimits_1\omega_i\mu(\mathrm{P}_i)+\sum\nolimits_2\omega_i\mu(\mathrm{P}_i)\ (\omega_i=\omega(f,P_i)),$$

де перша сума береться по i, для яких $\mathrm{P}_i\subset C_3$, а друга по *і*, для яких $P_i\subset K$.

Оскільки $|f(x)|\le\mathrm{M}$ на X, то замінюючи ω_i в першій сумі на $2\mathrm{M}$, отримаємо

$$\sum\nolimits_1\ \omega_i\mu(\mathrm{P}_i)\le 2\mathrm{M}\mu(C_3)\le 2\mathrm{M}k(3)\varepsilon .$$

Оцінимо другу суму. Із включення $\mathrm{E}_\varepsilon\subset C_2=\mathrm{X}\setminus\mathrm{K}$ випливає, що $\forall x\in\mathrm{K}\ \ \omega(f,x)<\varepsilon$, тобто $\exists\delta(\varepsilon)$ таке, що $\forall x_1,x_2$ таких, що $\rho(x,x_1)<\delta\ \ \rho(x,x_2)<\delta$ виконується нерівність: $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Із цієї обставини і компактності K, повторюючи доведення теореми Кантора [1, с. 87], отримаємо, що $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)$ таке, що $\forall x_1,x_2\in K$, для яких $\rho(x_1,x_2)<\delta$ виконується нерівність $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Обираючи $\lambda(\mathrm{P})$ менше відповідного $\delta(\varepsilon)$, отримаємо $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\ \ \forall x_1,x_2\in\mathrm{P}_i$ (отже, $\omega_i\le\varepsilon$) для $\mathrm{P}_i\subset\mathrm{K}$. Таким чином, $\sum\nolimits_2\omega_i\mu(\mathrm{P}_i)\le\varepsilon\mu(X)$, якщо $\lambda(\mathrm{P})<\delta$. Враховуючи вище зазначене, остаточно будемо мати, що $\forall\varepsilon<0\ \ \exists\delta(\varepsilon)$ таке, що

$$\forall\mathrm{P}\ \ \lambda(\mathrm{P})<\min(\delta(\varepsilon),d)\ \ \sum_{i=1}^{n}\omega_i\mu(\mathrm{P}_i)\le(2\mathrm{M}k(3)+\mu(X))\varepsilon ,$$

а отже, що для $f(x)$ виконується необхідна і достатня умови інтегрованості функції.

Розглянемо приклади застосування інтегралу Рімана.

Інтеграл на декартовому добутку просторів. Нехай задані простори (X_1,ρ_1), (X_2,ρ_2) з визначеними алгебрами $\Re_1$, $\Re_2$ і мірами μ_1 і μ_2 відповідно. Розглянемо простір $X=X_1\times X_2=\{(x,y)\mid x\in X_1,y\in X_2\}$ з метрикою $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{\rho_1^2(x_1,x_2)+\rho_2^2(y_1,y_2)}$; алгеброю $\Re$, натягнутою на $\Re_1\times\Re_2=\{A_1\times A_2\mid A_1\in\Re_1,A_2\in\Re_2\}$ і мірою $\mu=\mu_1\times\mu_2$, яка є розширенням міри, що задана на $\Re_1\times\Re_2$ рівністю $\mu(A_1\times A_2)=\mu_1(A_1)\cdot\mu_2(A_2)$.

Розглянемо функцію $f(x,y):X_1\times X_2\to R^1$. Якщо вона інтегрована на *X* за мірою *μ*, то можна ввести позначення $\int\limits_{X}f(x,y)d\mu(x,y)=\int\limits_{X_1\times X_2}f(x,y)d\mu_1(x)\times d\mu_2(y)$. Для довільної підмножини $A\subset X$ позначимо $A_x=\{y\in X_2\mid(x,y)\in A\},\ \forall x\in X_1$.

Розглянемо в R^2 область *D*, обмежену кривими $x=a$, $x=b$ і $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x\in[a,b]$. Ми будемо припускати, що $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, $x\in[a,b]$ і $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ неперервні на $[a,b]$. Тоді $D=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}\subset R^2$ замкнена, обмежена і квадрована (відносно стандартної міри Лебега) множина (враховуючи умову квадрованості криволінійної трапеції). Крім того,

$$\forall x\in[a,b]\ D_x=\{y\mid\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}=[\varphi_1(x),\varphi_2(x)].$$

Використовуючи вище сказане, сформулюємо теорему Фубіні [2] для даної ситуації.

Теорема. Нехай $f(x,y)$ інтегрована на області *D* і $\forall x\in[a,b]$ існує $I(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$, тоді $I(x)$ інтегрована на $[a,b]$ і $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$

Справедливість теореми випливає з теореми Фубіні, (де $X=[a,b]\times[c,d]$, $c=\min\limits_{x\in[a,b]}\varphi_1(x)$, $d=\max\limits_{x\in[a,b]}\varphi_2(x)$), оскільки границя області *D* задана неперервними кривими. Площа неперервної кривої (в R^2) дорівнює 0 (з квадрованості криволінійної трапеції), отже, міра Лебега границі області D дорівнює 0. Крім того, міра Лебега в $X\subset R^2$ задовольняє вимогам теореми Лебега.

Зауваження. Все викладене вище справедливе, якщо φ_1 і φ_2 – кусково-неперервні. Для того, щоб в цьому переконатися, достатньо область розбити на скінчену кількість областей вказаного виду і скористатися властивістю інтегралу: інтеграл по об'єднанню областей, що не перетинаються, дорівнює сумі інтегралів по складовим областям.

Нехай $(\tilde{O},\rho)$ – компактний простір, $\Re$ – алгебра і μ – міра. Нехай $f(x): X \to R^1$, $f(x) \ge 0$ $x \in X$ і обмежена $f(x) \le M$. Розглянемо множину

$$\Phi = \{(x,y) \mid x \in X, 0 \le y \le f(x)\} \subset X \times [0,M].$$

В просторі $X \times [0,M]$ розглянемо міру $\upsilon = \mu \times m$ (де m – міра Лебега на $[0,M]$).

Теорема. Нехай $f(x): X \to R^1$ – неперервна, тоді Φ – кубована множина в $X \times [0,M]$ і $\upsilon(\Phi) = \int_X f(x)d\mu(x)$.

Доведення. Нехай *P* – довільне розбиття множини *X*. Для кожного $i = 1,...,n$ $m_i = \inf_{P_i} f(x)$, $M_i = \sup_{P_i} f(x)$, тоді $G(P) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i \times [0,m_i] \subset \Phi \subset F(P) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i \times [0,M_i] \subset X \times [0,M]$. Множини $G(P)$, $F(P)$ – кубовані і

$$\upsilon(G(P)) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(P_i) = \overline{S}(f,P) \quad \upsilon(F(P)) = \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(P_i) = \underline{S}(f,P).$$

Оскільки $f(x)$ – неперервна, то вона інтегрована на *X*, тобто $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon)$, $\forall P$ $\lambda(P) < \delta$ виконується нерівність $\upsilon(F(P)) - \upsilon(G(P)) = \underline{S}(f,P) - \overline{S}(f,P) < \varepsilon$. Таким чином, $\forall \varepsilon > 0$ існують кубовані множини $G(P), F(P) \subseteq X \times [0,M]$, $G(P) \subseteq \Phi \subseteq F(P)$ і $\nu(F(P) - \nu(G(P))) < \varepsilon$ тобто Φ – кубована.

Покажемо, що $I = \int_X f(x)d\mu(x)$ дорівнює $\upsilon(\Phi)$. Враховуючи вище викладені факти і означення квадрованої множини, отримаємо, що $\forall P$ множини

$$X\ \overline{S}(f,P) \le I \le \underline{S}(f,P), \quad \upsilon(G(P)) = \overline{S}(f,P) \le \upsilon(\Phi) \le \underline{S}(f,P) = \upsilon(F(P)),$$

тобто $|I - \upsilon(\Phi)| < \underline{S}(f,P) - \overline{S}(f,P)$. Отже, $\forall \varepsilon > 0$ обираючи *P* таке, що $\lambda(P) < \delta$ (існування якого наведено вище), отримаємо $|I - \upsilon(\Phi)| < \varepsilon$ (враховуючи інтегрованість f). Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, то $I - \upsilon(\Phi) = 0$, або $\upsilon(\Phi) = \int_X f(x)d\mu(x)$

Приклади. 1. Нехай *X*=[*a*,*b*], $\tilde{\Re}$ - алгебра множин, вимірних за Жорданом,

$\mu(A) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n}[\alpha_i;\beta_i)) = \sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i)$ $(\forall A \in \Re)$.

Розглянемо розбиття $P = \{P_i\}_{i=1}^{n}$, $P_i = [\tilde{o}_i, x_{i+1}]$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ (розбиття вказаного виду задовольняє усі умови означення). Тоді $\mu(P_i) = \tilde{o}_{i+1} - \tilde{o}_i = \Delta\tilde{o}_i$, і $\xi_i \in [\tilde{o}_i, \tilde{o}_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n\text{-}1$; $\lambda(P)$ – довжина найбільшого відрізка. Інтегральна сума в цьому випадку буде мати вигляд: $\sigma(f,(P,\xi)) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta\tilde{o}_i$. В даному випадку для інтеграла використовуємо позначення $I = \int_a^b f(x)dx$.

Відмітимо, що коли f інтегрована по даній мірі, оскільки границя існує для будь-яких *P*, то $I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,(P,\xi))$, де в інтегральній сумі можна брати розбиття тільки вказаного виду (оскільки границя існує для будь-яких *P*).

2. Якщо в попередньому прикладі міру задати за допомогою зростаючої, обмеженої та неперервної зліва функції *g(x)*, шляхом рівності $\mu([\alpha,\beta)) = g(\beta) - g(\alpha)$, тоді інтегральна сума, вказана у прикладі 1, буде мати вигляд: $\sigma(f(P,\xi)) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i))$.

Інтеграл I в цьому випадку називають *інтегралом Рімана-Стілтьєса* і позначають $(R)\int\limits_{[a,b)} f(x)d\mu(x)=\int\limits_a^b f(x)dg(x)$.

3. Нехай $\mathrm{E}\subset R^2$, Е – обмежена квадрована множина, а $\mathfrak{R}(E)$ – алгебра квадрованих підмножин Е, $\mu(\mathrm{A})=S(\mathrm{A})$ – площа A, для довільної $\mathrm{A}\in\mathfrak{R}$. Для довільного розбиття P множини Е, P_i $(i=1,\ldots,n)$ – квадровані множини, інтегральна сума для функції $f(\tilde{o},\acute{o}):\mathrm{E}\to R^1$ має вигляд: $\sigma(f,(\mathrm{P},(\xi,\eta)))=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)S(\mathrm{P}_i)$, ($(\xi_i,\eta_i)\in\mathrm{P}_i$ – обрані точки). В цьому випадку I позначають $\mathrm{I}=\iint\limits_{\mathrm{E}} f(x,y)dxdy$ і називають *подвійним інтегралом* від функції $f(x,y)$ по множині $\mathrm{E}\subset R^2$.

4. Нехай $\Phi\subset R^3,\Phi$ – обмежена кубована множина, $\mathfrak{R}(\Phi)$ – алгебра кубованих підмножин $\hat{O}$, $\mu(\mathrm{A})=V(\mathrm{A})$ – об'єм А, для довільної $\mathrm{A}\in\mathfrak{R}$.

Для довільного розбиття Р множини Ф $\mathrm{P}_i(i=1,\ldots,n)$ – кубовані множини, інтегральна сума для функції $f(x,y,z):\Phi\to R^1$ має вигляд: $\sigma(f,(\mathrm{P},(\xi,\eta,\zeta)))=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)V(\mathrm{P}_i)$ ((ξ_i,η_i,ζ_i) – обрані точки в P_i).

В цьому випадку I позначають $\mathrm{I}=\iiint\limits_{\Phi} f(x,y,z)dxdydz$ і називають *потрійним інтегралом* від функції *f (x, y, z)* на множині $\Phi\subset R^3$.

5. Нехай $\mathrm{E}\subset R^n$, E – обмежена і вимірна за Жорданом (кубована), $\mathfrak{R}(\mathrm{E})$ – алгебра кубованих підмножин в Е, а $\mu(\mathrm{A})$ – об'єм *A*, де *A* – кубована підмножина *E*. Тоді, повторюючи міркування прикладів 3 і 4, для функції $f(x_1,\ldots,x_n):\mathrm{E}\to R^1$ отримаємо $\mathrm{I}=\iint\limits_{\mathrm{E}}\ldots\int f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$, який називають *n-кратним інтегралом* від функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ на множині $\mathrm{E}\subset R^n$.

Поверхневий інтеграл. Розглянемо в R^n *F* – кубовану область, стандартна міра Лебега – об'єм в *n*-вимірному просторі, тоді одержуємо кратний інтеграл в R^n.

Нехай в R^3 задана поверхня Φ, проекція якої на площину XOY – квадрована замкнена область $D\subset R^2$. При цьому будемо припускати, що поверхня Ф в кожній точці має дотичну площину (а значить і нормаль), тобто диференційована в кожній точці області *D* функція, що задає дану поверхню. Це означає, що в кожній точці області *D* існує окіл, в якому поверхня відрізняється від дотичної площини (в даній точці) на нескінченно малу більш високого порядку, ніж діаметр околу.

Крім того, будемо припускати, що нормаль до поверхні Ф неперервним чином змінюється, якщо основа її неперервно переміщується по поверхні і пряма, паралельна осі OZ, що проходить через довільну точку області *D*, перетинає поверхню Ф в одній точці, тобто проектування Ф на *D* – взаємно-однозначне відображення.

Тоді $\psi: D\to\Phi$ – гомеоморфізм, який здійснює проектуванням Φ на площину XOY. На алгебрі $\tilde{\mathfrak{R}}$ квадрованих підмножин Φ визначена міра $S(A)$ $\left(A\in\tilde{\mathfrak{R}}\right)$ – площа і $S(A)=\iint\limits_{\psi^{-1}(A)}\frac{1}{|\cos\upsilon|}dxdy$. Причому усі умови на алгебру і міру виконуються.

Припустимо, що на поверхні Φ задана неперервна функція $F(x,y,z)$, тоді, згідно з вище зазначеним, існує інтеграл Рімана $\iint\limits_{\Phi} F(x,y,z)dS$, який будемо називати *поверхневим інтегралом* від функції *F* по поверхні Φ.

Криволінійний інтеграл. Нехай задана дуга $AB\subset R^2$ і $\psi: AB\to[a,b]$ – гомеоморфізм, який здійснює проектуванням дуги *AB* на вісь *OX*. На алгебрі $\tilde{\mathfrak{R}}$ спрямних дуг (підмножин) дуги *AB* визначена природна міра – довжина дуги $l(A)=\int\limits_{\psi^{-1}(A)}\frac{1}{|\cos(n,y)|}dx$, $\forall A\in\tilde{\Re}$. При цьому алгебра $\tilde{\Re}$ і міра задовольняють всім умовам означення інтегралу Рімана. Припустимо, що вздовж дуги *AB* задана неперервна функція $f(x,y)$, тоді існує інтеграл Рімана $\int\limits_{AB}f(x,y)dl$, який будемо називати *криволінійним інтегралом* I *роду* від функції *f* вздовж дуги *AB*.

Зауваження. На відміну від інтегралу Рімана, на відрізку $\int\limits_{AB}f(x,y)dl=\int\limits_{BA}f(x,y)dl$, тому в інтегралі справа нижня границя менша за верхню, незалежно від обходу від *A* до *B* чи навпаки.

Нехай задана дуга *AB*, що взаємно-однозначно проектується на $[a,b]$ осі *OX*. Розглянемо функцію $f(x,y)$ визначену вздовж дуги *AB*. Розіб'ємо дугу *AB* дугами A_iA_{i+1} $i=1,...,k-1$ і оберемо $(\xi_i,\eta_i)\in A_iA_{i+1}$, тоді сума $\sigma\left(f,\left(P,(\xi,\eta)\right)\right)=\sum\limits_{i=0}^{k-1}f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$, R^3 являє собою інтегральну суму для інтегралу Рімана від функції $f(x,y)$, що визначена на множині *X* = *AB*. При цьому алгебра $\Re(\%)$ – множини, проекції яких співпадають з множинами із стандартної вихідної алгебри $\Re$ на півінтервалі $[a,b)$, а міра дуги A_iA_{i+1} дорівнює $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$.

Якщо існує відповідний інтеграл Рімана, то ми його будемо називати *криволінійним інтегралом* II *роду* від функції $f(x,y)$ вздовж дуги *AB* при переході від *A* до *B*. І позначимо $\int\limits_{AB}f(x,y)dx$. Аналогічно, якщо в інтегральній сумі замість Δx_i взяти $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$ отримаємо криволінійним інтегралом II роду від функції $f(x,y)$ вздовж дуги *AB* при переході від *A* до *B*. І позначимо $\int\limits_{AB}f(x,y)dC$.

Переваги такого підходу введення інтегралу Рімана пояснюються тим, що кратні, поверхневі та криволінійні інтеграли вписуються в дану схему та одержуються, таким чином, в якості прикладів за відповідного вибору простору та міри. Саме тому такий підхід під час підготовки майбутніх вчителів математики сприяє професійній орієнтації навчання математичного аналізу.

Використана література:

1. Березанский Ю.М. Функциональный анализ. Киев : Вища Школа, 1990. 600 с.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. В 3-х ч. Київ : Вища школа, 1991. 648 с.
3. Зорич В.А. Математический анализ. Москва : МЦНМО, 2002. 476 с.

References:

1. Berezanskiy, U.M. (1990). Funkcionalniy analiz [Functional Analysis]. Kiev, 600 [in Ukrainian].
2. Davidov, M.O. (9991). Kyrs matematichnogo analizy [Course of mathematical analysis]. Kiev, 648 [in Ukrainian].
3. Zorich, V.A. (2002). Matematicheskiy analiz [Mathematical analysis]. Moscow, 476 [in Russian].

Самойленко В. Г., Григорьева В. Б. Особенности введения понятия интеграла Римана при преподавании математического анализа будущим учителям математики.

Содержание математической подготовки будущих учителей математики в высших педагогических учебных заведениях существенно отличается от содержания подготовки специалистов в классических и технических университетах. Это связано с тем, что фундаментальная математическая подготовка будущего учителя математики должна обеспечить действенные знания, а также профессиональные компетенции, которые выходят за пределы школьного курса математики. Среди дисциплин, которые обеспечивают фундаментальную математическую подготовку, ведущее значение имеет математический анализ. В статье на примере рассмотрения конкретного вопроса данного курса определены математические аспекты, касающиеся особенностей преподавания материала с учетом требований, предъявляемых сегодня к процессу подготовки специалистов в области образования. Рассмотрено введение понятия интеграла Римана для функций, заданных на метрических пространствах с мерой. Преимущества такого подхода объясняется тем, что кратные, поверхностные и криволинейные интегралы вписываются в данную схему и получаются, таким образом, в качестве примеров при соответствующем выборе пространства и меры.

Ключевые слова: *математическая подготовка будущих учителей математики, функция, заданная на метрическом пространстве с мерой, интеграл Римана.*

Samoylenko V. G., Hryhorieva V. B. Features of the introduction of Riemann integral concept at a mathematical analysis for future teachers of mathematics.

The article deals with the methodical features of the introduction of the concept of the Riemann integral in the course of teaching the course of mathematical analysis in the pedagogical specialty. The future teacher of mathematics must obtain a basic mathematical training, which will provide him with effective knowledge, professional competences, beyond the boundaries of the course of mathematics that is taught in school. Mathematical analysis plays a leading role in the training of future mathematics teachers. In the article, on the example of consideration of a particular issue of this course, mathematical aspects related to the peculiarities of the teaching of the material are determined, taking into account those requirements that are being made today to the process of training specialists in the field of education. We consider the introduction of the concept of the Riemann integral for functions given on metric spaces with measure. The advantages of this approach are explained by the fact that multiple, surface, and curvilinear integrals fit into this scheme and are thus obtained as examples, with the appropriate choice of space and measure.

Key words: *mathematical preparation of future teachers of mathematics, mathematical analysis, function given on metric space with measure, Riemann integral.*

УДК 378.141.+ 81.28+811.114
DOI https://doi.org/10.31392/2311-5491/2019-68.40

Самоненко Н. В.

ПРИНЦИПИ ОРГАНИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ АНГЛОЯЗЫЧНОЙ ДЕЛОВОЙ ПИСЬМЕННОЙ РЕЧИ БУДУЩИХ СУДОВОДИТЕЛЕЙ

Рассматривается проблема обучения англоязычной деловой письменной речи будущих судоводителей. Выявляются и обосновываются дидактические принципы организации процесса обучения англоязычной деловой письменной речи специалистов морского флота, а именно: взаимосвязи обучения и воспитания, научности изучаемого материала, наглядности в презентации изучаемого материала, последовательности в обучении изучаемого материала, доступности для усвоения материала, прочности сохранения изученного языкового и речевого материала в памяти, правомерности перехода к изучению каждой следующей части языкового и речевого материала при условии их относительно полного усвоения, актуальности изучаемого содержания, интегрированного обучения. Данные принципы и смысловое содержание профессиональной деятельности будущих судоводителей обеспечивают основу для разработки соответствующей лингводидактической модели процесса обучения.

Ключевые слова: *профессиональное обучение, методика обучения, англоязычная деловая письменная речь, принципы организации процесса обучения, будущие судоводители.*

(статтю подано мовою оригіналу)

Практическое владение иностранным языком для профессионального общения является одним из показателей конкурентоспособности на современном рынке труда, поэтому обучение языку становится приоритетным направлением системы высшего профессионального образования. Особое значение имеет иноязычная подготовка специалистов морского транспорта. Английский язык выступает языком международного морского общения, и, следовательно, является важнейшей составляющей профессиональной деятельности моряков. Практика преподавания иностранного языка на морских специальностях наглядно свидетельствует о том, что фактический уровень владения языком выпускниками зачастую не соответствует выдвигаемым программным требованиям и требованиям, которые определены Международной Конвенцией “О подготовке и дипломировании моряков и несении вахты”.

В Конвенции указано, что судоводитель должен знать, как надо “вести коммуникацию <...> для обеспечения безопасности человеческой жизни и сохранности имущества, <...> снижения риска ошибок при передаче информации” [3, с. 506], управления операциями судна, судовыми установками и механизмами, навигационными системами и приборами, управления движением водного транспорта. К его компетенции относятся вопросы ведения деловой переписки с портовыми властями, судовладельцами, представителями морских компаний, агентами, юридическими лицами.

Поэтому возникла необходимость качественной профессиональной подготовки будущих специалистов морского флота в соответствии с международными стандартами в сфере письменного общения, а соответственно, и разработки соответствующей методики обучения. Однако любая методика, прежде всего, основывается на определенных дидактических принципах.

Поэтому **целью нашей работы** было выявить дидактические принципы организации процесса обучения англоязычной деловой письменной речи будущих судоводителей.

Организация учебного процесса всегда происходит по определенным принципам. Под принципами обучения понимаются исходные положения, которые определяют различные аспекты обучения – содержание, методы, средства, формы. Дидактические принципы отражают общие требования к формированию